Astronomisches Praktikum

C2: Randverdunkelung der Sonne

Lisa Theres Lehmann
Marc Ludwig

Beobachtungsdatum: 6. Juni 2013

Abgabe: 13. Juni 2013

Herleitung des Intensitätsprofils zur Randverdunkelung[1]

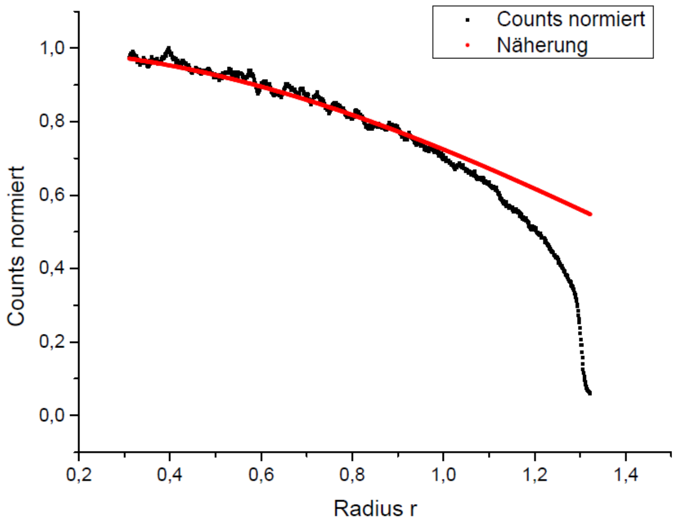

Abbildung 1: Vergleichen zwischen Messdaten und Modell

Beginnen wir mit der Strahlungstransportgleichung entlang eines Sehstrahls

$$\frac{dI_\nu}{ds} = -\rho\kappa_\nu I_\nu + \rho j_\nu$$

und führen diese auf die Form für eine planparallele Geometrie mit $dx = \cos(\theta)ds$ und der Definition $\mu = \cos(\theta)$

$$\mu\frac{dI_\nu(\mu, x)}{dx} = -\rho\kappa_\nu I_\nu(\mu, x) + \rho j_\nu(\mu, x) \tag{1}$$

Definieren wir im folgenden die Optische Tiefe mit $d\tau_\nu = -\rho\kappa_\nu dx$ und dividieren Gleichung (1) mit $-\rho\kappa_\nu$

$$\mu\frac{dI_\nu(\mu, \tau_\nu)}{d\tau_\nu} = I_\nu(\mu, \tau_\nu) - \frac{j_\nu(\mu, \tau_\nu)}{\kappa_\nu} \tag{2}$$

Wobei die Quellfunktion mit $S_\nu(\mu, \tau_\nu) = \frac{j_\nu(\mu,\tau_\nu)}{\kappa_\nu}$ definiert ist und in der LTE-Näherung $S_\nu(\mu, \tau_\nu) = B_\nu(T)$ gilt.

Zur Herleitung benötigen wir die ersten zwei Momente der Strahlungstransportgleichung und dafür ist es ratsam die ersten drei Momente des Strahlungfeldes auszurechnen.

[1] u.a. unter Verwendung von http://www.sternwarte.uni-erlangen.de/ãi05/vorlesungen/astrocomp/aufgabe3c_folien.pdf, Stand 09.06.2013

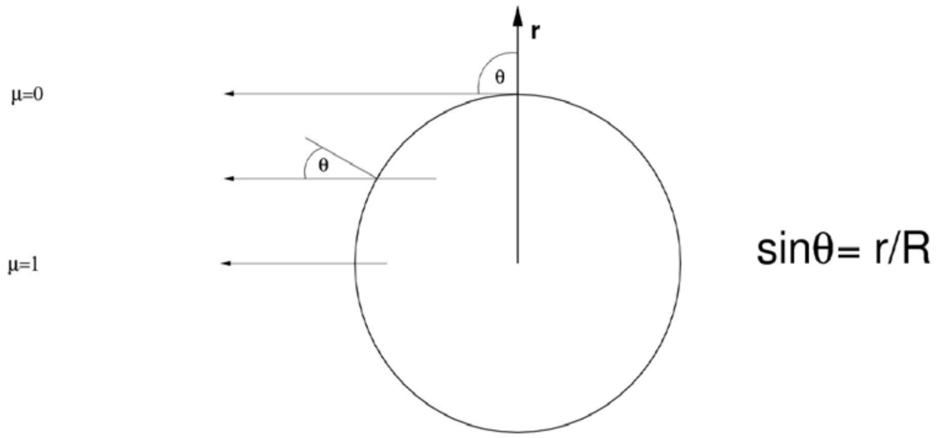

Abbildung 2: Skizze zur Veranschaulichung verwendeter Variablen im geometrischem Kontext

Momente des Strahlungsfeldes

0. Moment - Mittlere Intensitat ($\oint \mu^0 d\omega$)

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi}\oint I_\nu\, d\omega = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} I_\nu\, \sin(\theta)\, d\theta d\phi = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu\, d\mu \tag{3}$$

1. Moment - Fluß ($\oint \mu d\omega$)

$$\frac{1}{4}F_\nu = H_\nu = \frac{1}{4\pi}\oint I_\nu\, \mu\, d\omega = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu\, \mu\, d\mu \tag{4}$$

2. Moment - Strahlungsdruck ($\oint \mu^2 d\omega$)

$$K_\nu = \frac{1}{4\pi}\oint I_\nu\, \mu^2\, d\omega = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu\, \mu^2\, d\mu \tag{5}$$

$$P_{rad} = \frac{4\pi K_\nu}{c} \tag{6}$$

Damit können nun die Momente der Strahlungstransportgleichung berechnet werden.

Momente des Strahlungstransportgleichung

0.Moment - ($\oint \mu^0 d\omega$) unter Verwendung von (3) und (4)

$$\oint \mu \frac{dI_\nu(\mu,\tau_\nu)}{d\tau_\nu} d\omega = \oint (I_\nu(\mu,\tau_\nu) - \frac{j_\nu(\mu,\tau_\nu)}{\kappa_\nu}) d\omega \tag{7}$$

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{1} \mu \frac{dI_\nu(\mu,\tau_\nu)}{d\tau_\nu} d\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (I_\nu - B_\nu) d\mu \tag{8}$$

$$\frac{1}{4}\frac{dF_\nu}{d\tau_\nu} = J_\nu - B_\nu \tag{9}$$

Im Strahlungsgleichgewicht gilt

$$F = \int_0^\infty F_\nu d\nu = const. = \frac{\sigma T_{eff}^4}{\pi} \tag{10}$$

$$\text{oder} \frac{dF}{d\tau} = 0 \tag{11}$$

1.Moment - ($\oint \mu d\omega$) unter Verwendung von (6) und (4) und das B_ν istrop ist

$$\frac{1}{2}\int_{-2}^{1} \mu^2 \frac{dI_\nu(\mu, \tau_\nu)}{d\tau_\nu} d\mu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} (I_\nu - B_\nu)\mu \, d\mu \tag{12}$$

$$2\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = \frac{1}{2}F_\nu \tag{13}$$

$$4\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = F_\nu \tag{14}$$

Nun kommen wir zur ersten Näherung der Diffusionsnäherung. Das Strahlungsfeld wird hier als näherungsweise isotrop angesehen und es wird die Gleichung (14) verwendet.

$$I_\nu = I_{0,\nu} + \mu \, I_{1,\nu} + \mu^2 \, I_{2,\nu} \tag{15}$$

$$K_\nu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} I_\nu \, \mu^2 \, d\mu \approx \frac{I_{0,\nu}}{3} = \frac{J_\nu}{3} \tag{16}$$

$$\frac{4}{3}\frac{dJ_\nu}{d\tau_\nu} = F_\nu \tag{17}$$

Jetzt verwenden wir die Eddington-Näherung, welche eine Quasi-Isotropie in der gesamten Atmosphäre annimmt und damit insbesondere auch am Rand.

$$J_\nu(\tau_\nu = 0) = \frac{1}{2}\int_0^1 I_\nu(\mu, 0) d\mu = \frac{1}{2} I_0 \tag{18}$$

$$F_\nu(\tau_\nu = 0) = 2\int_0^1 I_\nu(\mu, 0)\mu \, d\mu = I_0 \tag{19}$$

$$\Rightarrow J_\nu(0) = \frac{1}{2}F_\nu(0) \tag{20}$$

Danach benötigen wir die Näherung der „Grauen Atmosphäre“. Diese nimmt an, das die Opazität etc. nicht frequenzabhängig sind. Daraus folgt, dass man nur I, J, F für die Strahlungstransportgleichung lösen muss. Aus Gleichung (11) folgt:

$$\frac{dF}{d\tau} = 0 \Rightarrow F(\tau) = const. = \frac{\sigma T_{eff}^4}{\pi} \tag{21}$$

und aus der Diffusionsgleichung (17) folgt:

$$\frac{dJ}{d\tau} = \frac{3}{4} \Rightarrow J(\tau) = \frac{3}{4}F\tau + const. \tag{22}$$

Da die Gleichung (22) die Eddington-Näherung (20) erfüllen muss gilt:

$$J(\tau) = \frac{3}{4}F \cdot \left(\tau + \frac{2}{3}\right) \tag{23}$$

Nehmen wir nun an die LTE-Atmosphäre befindet sich im Gleichgewicht

$$J = S = B(T) = \frac{\sigma T^4}{\pi} \Rightarrow \left(\frac{T(\tau)}{T_{eff}}\right)^4 = \frac{3}{4} \cdot \left(\tau + \frac{2}{3}\right) \tag{24}$$

Die Randverdunkelung lässt sich nun durch lösen der Strahlungstransportgleichung lösen. Zur Erinnerung

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S$$

Da S bekannt ist haben wir es hier mit einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu tun. Um diese zu lösen benutzen wir den Integrierenden Faktor $e^{-\frac{\tau}{\mu}}$. Da

$$\frac{d}{d\tau}\left(I \cdot e^{-\frac{\tau}{\mu}}\right) = \left(\frac{dI}{d\tau} - \frac{\tau}{\mu} I\right) \cdot e^{-\frac{\tau}{\mu}}$$

ist, folgt:

$$\frac{dI \cdot e^{-\frac{\tau}{\mu}}}{d\tau} = -\frac{1}{\mu} S \cdot e^{-\frac{\tau}{\mu}} \tag{25}$$

Nun wird die Gleichung von τ_1 bis τ_2 integriert.

$$I(\tau_1, \mu) e^{-\frac{\tau_1}{\mu}} = I(\tau_2, \mu) e^{-\frac{\tau_2}{\mu}} + \frac{1}{\mu} \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(t) \cdot e^{-\frac{t-\tau}{\mu}} dt \tag{26}$$

$$\Leftrightarrow I(\tau_1, \mu) = I(\tau_2, \mu) e^{-\frac{\tau_2 - \tau_1}{\mu}} + \frac{1}{\mu} \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(t) \cdot e^{-\frac{t-\tau}{\mu}} dt \tag{27}$$

Nun nehmen wir einen Emergenten Fluß der Atmosphäre an, d. h. $\tau_1 = 0$ und $\tau_2 = \infty$.

$$I(0, \mu) = \int_0^\infty \frac{1}{\mu} S(t) e^{-\frac{t}{\mu}} dt \tag{28}$$

$$= \frac{3}{4} F \int_0^\infty \left(t + \frac{2}{3}\right) \frac{1}{\mu} e^{-\frac{t}{\mu}} dt \tag{29}$$

$$= \frac{3}{4} F \left(\mu + \frac{2}{3}\right) \tag{30}$$

Die Mitte-Rand-Variation ist damit:

$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = \frac{\frac{3}{4} F \left(\mu + \frac{2}{3}\right)}{\frac{3}{4} F \left(1 + \frac{2}{3}\right)} = \underline{\underline{\frac{3}{5}\left(\mu + \frac{2}{3}\right)}} \tag{31}$$

Zur Veranschaulichung wird nochmal auf Abbildung 2 verwiesen.